ДИС Иччев 29.11.12

Неопределеност от вида $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Разглеждаме $\lim_{x \to a} \frac{g'(x)}{f'(x)} = 0$ Крайна граница е

$$\frac{\varnothing}{\infty} \to 0 \qquad \frac{1}{\infty} \to 0$$

$$\frac{1}{\varnothing} \to 0 \qquad \frac{1}{0} \to \infty$$

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \to a} \frac{g'(x)}{f'(x)} = 0$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \to \infty$$

Да се докаже

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad x \to +\infty$$

Намираме (c, ∞)

Смяната променливата

$$x = \frac{1}{t} \Rightarrow t = \frac{1}{x} \qquad t\left(0; \frac{1}{c}\right)$$

$$t(0, c^{-1})$$

Разглеждаме новите променливи

$$F(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$$
$$G(t) = g\left(\frac{1}{t}\right)$$

(1) $$\lim_{t\to 0} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

но $F(t) = f'(x) = -f'(1/t)\frac{1}{t^2}$

и $G(t) = g'(x) = -g'(1/t)\,1/t^2$

следсъкращаване на „$1/t^2$" и „$-$"

$$\frac{F(t)}{G(t)} = \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{t\to 0} \frac{F(t)}{G(t)}}$$

Можем да пишем

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{t\to 0} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ от (1)}$$

по Шлемилх - Рош →
от преди

$$R_n = \frac{(x-a)^p (x-3)^{n-p+1} \cdot f^{(n+1)}(3)}{p\,n!}$$

при $\boxed{p = n+1}$ след полагане

$$R_n = \frac{(x-a)^{n+1}(x-\xi)^0 f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = \frac{(x-a)^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

нека $\xi = a + \theta(x-a) \Rightarrow \theta = \frac{\xi - a}{x-a}$ и $0 < \theta < 1$

$$\Rightarrow \frac{(x-a)^{n+1} f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}$$

(Лагранж)

нека положим $(p = 1) \Rightarrow$

$$R_n = \frac{(x-a)(x-\xi)^n f^{(n+1)}(\xi)}{n!}$$

$$x - \xi = x - a - \theta(x-a) = (x-a)(1-\theta) \Rightarrow$$

$$R_n = \frac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^n f^{(n+1)}(a+\theta)(x-a)}{n!}$$

(Коши)

Лема
Ако имаме функция $h(x)$, която има n производни в околност на точката a то имаме $h(a) = h'(a) = \dots = h^{(n)}(a) = 0$

Тд функцията $h(x) = o(x-a)^n$ (o-о малко)

сим $\frac{h(x)}{(x-a)^n} \xrightarrow{h(x)} 0$
$x \to a$

Док-во (по индукция)

при $n=1$ имаме $\frac{h(x)}{x-a}$

при $h(a)=0 \Rightarrow \frac{h(x)-h(a)}{x-a} \to h'(a)$

при $x \to a$

но $h'(a)=h(a)=0 \Rightarrow \lim \frac{h(x)}{(x-a)^n}=0$

$$\frac{h(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{h(x)-h(a)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{h'(\xi)(x-a)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{h'(\xi)}{(x-a)^n}$$

умножаваме с $\frac{(\xi-a)^n}{(\xi-a)^n} \Rightarrow \frac{h'(\xi)}{(\xi-a)^n} \cdot \frac{(\xi-a)}{(x-a)} \Rightarrow \to 0$

$\frac{h'(\xi)}{(\xi-a)^n} \to 0$

$\frac{(\xi-a)}{(x-a)} < 1$

$\Rightarrow$ Твърдението е вярно

$$R_n(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f'(a)(x-a)}{1!} - + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)}{n!} \right)$$

полинома на Тейлър

$R_n = o(x-a)^n$ – форма на Пеано